Titre : Les vagues solitaires

Auteur(s) : Gabriel Lapointe

Revue : CaMUS (Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

Volume : 4

Année : 2013

Pages : 72-91

Éditeur : Université de Sherbrooke. Département de Mathématiques

URI : Repéré à : http://camus.math.usherbrooke.ca/revue.html

Page vide laissée intentionnellement

CaMUS **4**, 72 – 91

Les vagues solitaires

Gabriel Lapointe

RÉSUMÉ On montrera comment obtenir les équations décrivant les vagues d'eau à partir de la loi de la conservation de la masse et de la seconde loi de Newton. Celles-ci donneront les équations du mouvement et de la continuité d'Euler. On expliquera comment ces équations sont générées et on utilisera une approche asymptotique pour décrire les solutions à ces équations. Plus particulièrement, on dérivera les équations décrivant les vagues d'eau pour trouver l'équation de Korteweg-de Vries.

1 Introduction

Les vagues à la surface de l'eau constituent un problème de la physique et des mathématiques qui fait évidemment partie de la théorie des ondes. Plusieurs types de vagues subsistent dans un certain volume d'eau (par exemple une rivière, un océan ou une mer) et de nombreux facteurs peuvent les influencer, en particulier la profondeur de l'eau, les obstacles (par exemple des bateaux ou des rochers), le vent, la tension, la pression, les ondes dégagées par les plaques tectoniques et plusieurs autres facteurs. Ce phénomène naturel peut donc devenir très complexe lorsque tous ces facteurs sont réunis dans un même problème. Dans notre cas, on négligera plusieurs de ces facteurs, afin de rendre le problème sous une forme simplifiée ce qui en facilitera sa résolution.

On débutera l'étude du problème des vagues d'eau en formulant des hypothèses sur le fluide et on utilisera la loi de la conservation de la masse et la seconde loi de Newton pour retrouver les équations du mouvement et de continuité d'Euler. Ces lois seront développées et expliquées en détails lors des deux prochaines sections. En particulier, on utilisera des concepts (expliqués) de la mécanique des fluides et d'analyse dimensionnelle qui seront très utiles pour l'obtention des équations qui formeront le problème des vagues d'eau. La démarche complète est donnée de façon détaillée aux sections 2 et 3 et est fortement inspirée de [Joh97], [Joh03] et [JD92].

Ensuite, on trouvera l'équation aux dérivées partielles de Korteweg-de Vries (KdV) qui est dérivée des équations du problème des vagues en se servant d'une approche asymptotique. La démarche complète de cette approche sera présentée à la quatrième section et s'inspire fortement de [JD92] et de [CJ08].

J'aimerais remercier Vasilisa Shramchenko pour ses remarques judicieuses, son temps et ses relectures qui m'ont grandement aidé à rédiger cet article.

2 Définitions, notations et rappels

Tout au long de cet article, certains termes employés sont tirés des notions de la physique, plus particulièrement de la mécanique des fluides. Le but de cette section est donc de définir ces termes et de rappeler des notions d'analyse vectorielle qui seront également utilisées.

Considérons un fluide non visqueux de volume V contenu dans un bassin $B \subset \mathbb{R}^3$ borné par la frontière ∂B. Chaque particule du fluide possède une position de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ à l'instant t. Afin d'alléger la notation, on écrira $(x,y,z) = (x(t),y(t),z(t))$. Le fluide possède une densité, notée $\rho(x,y,z,t)$, au point $(x,y,z) \in B$ à l'instant t. De plus, on note $\nu = (u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$ sa vitesse d'écoulement au point $(x,y,z) \in B$ à l'instant t. Précisons qu'un fluide visqueux est un fluide qui offre une certaine résistance lors de son écoulement (par exemple, le miel offre une plus grande résistance d'écoulement que l'eau).

Définition 2.1. On appelle *surface stationnaire* une surface dont l'équation est de la forme $z = g(x,y)$, où la fonction g est indépendante du temps.

On suppose que l'équation $z = h(x,y,t)$ décrit la surface du fluide en contact avec l'atmosphère et $z = b(x,y)$ la surface stationnaire du fond du bassin.

Introduisons maintenant la dérivation selon la méthode d'Euler. Soit une fonction $f(x,y,z,t)$ représentant une quantité physique du fluide au point $(x,y,z) \in B$ à l'instant t. Les vitesses d'écoulement horizontale, verticale et en profondeur sont données respectivement par $(u,v,w) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$.

Définition 2.2. On note $\frac{Df}{dt}$ la *dérivée matérielle* de $f(x,y,z,t)$ et on la définit comme étant

$$\frac{Df}{dt} = u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

On suppose également que le fluide est non rotationnel, c'est-à-dire que l'écoulement du fluide ne forme aucun tourbillon. Il est utile de rappeler quelques notions d'analyse vectorielle qui seront nécessaires pour définir la fonction du potentiel des vitesses. Cette fonction sera très utile pour les deux prochaines sections.

Définition 2.3. Soit l'opérateur gradient $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. On définit la *divergence* d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{A} = (A_x, A_y, A_z)$ comme étant

$$div(\overrightarrow{A}) = \nabla \cdot \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

où l'opération $\cdot$ représente le produit scalaire.

Définition 2.4. Soit l'opérateur gradient $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. On note Θ le *rotationnel* qu'on définit comme étant $\Theta(\nu) = \nabla \wedge \nu$ où $\wedge$ est le produit vectoriel et $\nu = (u,v,w)$ est la vitesse d'écoulement usuelle. On a donc

$$\Theta(\nu) = \nabla \wedge \nu = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Notons qu'un fluide est dit non rotationnel si $\Theta(\nu) = (0,0,0)$. Si le fluide est non rotationnel, alors, en vertu de la définition 2.4, on déduit que

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1}$$

On remarque que, pour toute fonction scalaire ϕ, on a toujours $\Theta(\nabla\phi) = \overrightarrow{0}$. En effet, en vertu de la définition 2.4 du rotationnel, on obtient, par un calcul similaire, que

$$\Theta(\nabla\phi) = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right).$$

En vertu de la commutativité des dérivées, on obtient $\Theta(\nabla\phi) = \overrightarrow{0}$. Par conséquent, pour un fluide non rotationnel, on peut définir une fonction $\phi(x,y,z)$ que l'on appelle potentiel des vitesses d'écoulement telle que $\nu = \nabla\phi$. Elle sera utilisée dans la section sur l'équation de Korteweg-de Vries.

3 Problème initial des vagues d'eau

Dans cette section, le but est de construire le problème initial des vagues d'eau. Pour ce faire, on utilisera les définitions et notations mentionnées à la section précédente. Tout au long de cet article, on considérera que le fluide est incompressible, non rotationnel et non visqueux sur une surface fermée sans tension. La loi de la conservation de la masse et la seconde loi de Newton seront également utilisées et expliquées afin de retrouver les équations du mouvement et de la continuité d'Euler.

3.1 Équations de la physique pour un fluide

Soit M la masse du fluide de volume V. Pour une densité uniforme ρ, on écrit $M = \rho V$. Si la densité n'est pas uniforme, on considère un petit volume dV dans lequel la densité peut être supposée indépendante de la position. Pour ce cas, on a $dM = \rho\, dV$. Par conséquent, on trouve que

$$M = \iiint_V \rho\, dV. \tag{2}$$

En supposant la densité indépendante du temps, on obtient que

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = 0. \tag{3}$$

On définit maintenant le débit massique dans un volume V comme étant le taux de masse d'un fluide sortant au travers une surface fermée S entourant le volume au temps t. Soit n le vecteur normal à la surface et orienté vers l'extérieur de la surface. Selon [IP03], le débit massique s'écrit

$$\frac{dM}{dt} = -\iint_S \rho\nu \cdot n \, dS. \tag{4}$$

En vertu du théorème de Green-Ostrogradski, on a que

$$\iint_S \rho\nu \cdot n \, dS = \iiint_V div(\rho\nu) \, dV. \tag{5}$$

De (3), (4) et (5), il vient

$$\iiint_V div(\rho\nu) \, dV = 0.$$

Cette relation est valide pour tout volume V, alors $div(\rho\nu) = 0$. Étant donné que ρ est uniforme, on obtient que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

L'équation (6) est appelée l'équation de continuité d'Euler pour un fluide incompressible.

Posons $G = (0{,}0, -g)$, où g est l'accélération gravitationnelle. On définit maintenant la force gravitationnelle, notée F_g, agissant sur un petit volume d'eau comme étant $dF_g = G \, dM$ où $dM = \rho \, dV$. On peut donc réécrire cette équation sous la forme

$$F_g = \iiint_V \rho G \; dV. \tag{7}$$

Notons que le signe négatif vient du fait que l'accélération gravitationnelle est exercée vers le bas. On définit aussi la force de pression, notée F_P, comme étant la force exerçant une pression P en un point quelconque $(x,y,z) \in B$ sur la surface S du fluide. Cette équation est donnée par $dF_P = -Pn \, dS$ qui peut être réécrite sous la forme

$$F_P = -\iint_S Pn \, dS. \tag{8}$$

Notons que la force de pression est exercée vers le bas, d'où le signe négatif. En vertu du théorème de Green-Ostrogradski, l'équation (8) est équivalente à

$$F_P = -\iiint_V \nabla P \, dV. \tag{9}$$

On peut maintenant définir la force résultante comme étant la somme des forces exercées sur le fluide, c'est-à-dire que $F_R = F_g + F_P$. Par conséquent, on obtient

$$F_R = \iiint_V \rho G \, dV - \iiint_V \nabla P \, dV = \iiint_V (\rho G - \nabla P) \, dV. \tag{10}$$

En vertu de la seconde loi de Newton, on a que $dF_R = \frac{D\nu}{dt}\,dM = \rho\frac{D\nu}{dt}\,dV$, où $\frac{D\nu}{dt}$ représente l'accélération au point $(x,y,z) \in B$ à l'instant t. Il en découle que

$$F_R = \iiint_V \rho\frac{D\nu}{dt}\,dV. \tag{11}$$

Des équations (10) et (11), il vient

$$\iiint_V \rho\frac{D\nu}{dt}\,dV = \iiint_V (\rho G - \nabla P)\,dV. \tag{12}$$

Comme (12) est vérifiée pour tout V, on obtient, en divisant par ρ de part et d'autre, que

$$\frac{D\nu}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + G. \tag{13}$$

En notation cartésienne, l'équation (13) s'écrit de façon équivalente, pour x, y et z, sous la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} & = & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} & = & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} & = & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g \end{array}\right. . \tag{14}$$

On sait que le vecteur de la vitesse d'écoulement s'écrit aussi $\nu = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$. Or, sur la surface d'eau $z = h(x,y,t)$, on a $w = \frac{dz}{dt} = \frac{dh}{dt}$. Mais, h dépend de $x(t), y(t)$ et t. Par conséquent, on trouve

$$w = \frac{dx}{dt}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{Dh}{dt}. \tag{15}$$

De plus, si $z = b(x,y)$, la surface stationnaire du fond, on effectue le même calcul lorsqu'on a obtenu (15). On trouve donc

$$w = u\frac{\partial b}{\partial x} + v\frac{\partial b}{\partial y} \quad \text{sur } z = b(x,y). \tag{16}$$

Puisque la surface de fond est stationnaire, sa vitesse doit être nulle, c'est-à-dire que $w = 0$ lorsque $z = b(x,y)$.

Lorsqu'on est à la surface du fluide, c'est-à-dire que $z = h(x,y,t)$, la pression est identique à celle de la pression atmosphérique notée P_a. En résumant ce que l'on a fait avec les équations (1), (6), (13), (15) et (16), on obtient donc les équations non linéaires décrivant les vagues d'eau suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{D\nu}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + G & \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \\ P = P_a & \text{en } z = h(x,y,t) \\ w = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} & \text{en } z = h(x,y,t) \\ w = u\frac{\partial b}{\partial x} + v\frac{\partial b}{\partial y} & \text{en } z = b(x,y) \\ w = 0 & \text{en } z = b(x,y) \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \end{array}\right. . \tag{17}$$

3.2 Adimensionnement (changement d'échelle)

Maintenant, on utilise l'analyse dimensionnelle qui a pour but de simplifier le problème des vagues (17). En effet, les unités de mesure physique du problème deviennent rapidement complexes à utiliser. Afin de réduire cette complexité, on rendra les variables du problème sans dimension, c'est-à-dire sans unité. On procèdera donc à un changement d'échelle pour ces variables.

Exemple . On sait que la vitesse, disons $v(t)$, s'écrit $v(t) = \frac{s}{t}$, où s est la distance en mètres parcourue au temps t en secondes. Afin de rendre cette vitesse sans dimension, on posera $v^*(t) = \frac{t_0}{s_0}v(t)$, où t_0 est le temps en secondes et s_0 est la distance en mètres, qui rend v^* sans unité.

Supposons que les vagues d'eau sont périodiques de période T et qu'on travaille en eau peu profonde. Introduisons l'amplitude moyenne d'une vague que l'on note a, la profondeur moyenne de l'eau au repos, notée h_0, et la longueur de la vague en surface, notée λ. Voir la figure 1 (page 7) pour une représentation simple d'une vague d'eau.

On désire rendre la vitesse $\nu = (u,v,w)$ sans dimension. Pour ce faire, on a besoin de la vitesse de propagation d'une vague que l'on note c. Selon [Sor06], cette vitesse est donnée par $c = \sqrt{gh_0}$ ou par $c = \frac{\lambda}{T}$ en eau peu profonde. Précisons que la provenance de ces formules est détaillée au deuxième chapitre de [Sor06].

On trouve donc que $\lambda = cT$. Comme $c = \sqrt{gh_0}$, on obtient $\lambda = \sqrt{gh_0}T$ et $T = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}$. Ainsi, l'unité de la période T est le temps en secondes. De plus, on sait que w est la vitesse d'écoulement verticale dont l'unité est le mètre par seconde (m/s). On remarque que $\frac{h_0}{T}$ a la même unité que w. En remplaçant T par $\frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}$, on obtient que $\frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda}$ a également la même unité que w. Par conséquent, on introduit w^* sans dimension tel que $w = \frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda}w^*$. Pour les vitesses d'écoulement horizontales u et v, introduisons u^* et v^* sans dimension tels que $u = u^*\sqrt{gh_0}$ et $v = v^*\sqrt{gh_0}$, car $\sqrt{gh_0}$ a la même unité que u et v.

Maintenant, on veut rendre sans dimension le temps t. On a vu que $T = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}$ exprime également le temps. On obtient, en introduisant t^* sans dimension, que $t = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}t^*$.

Puisque x et y représentent les coordonnées horizontales à la surface S, introduisons x^* et y^* sans dimension tels que $x = \lambda x^*$ et $y = \lambda y^*$. De la même façon, on introduit z^* sans dimension tel que $z = h_0 z^*$.

Soit $\eta(x,y,t)$ la hauteur de la vague au temps t. On sait que h_0 représente la hauteur moyenne de la surface d'eau au repos. Ainsi, on obtient la hauteur $h(x,y,t)$ en ajoutant la hauteur de la vague à h_0, c'est-à-dire que $h = h_0 + \eta$. Introduisons η^* sans dimension tel que $\eta = a\eta^*$, où a est l'amplitude moyenne de la vague d'eau. Pour la surface de fond $b(x,y)$, on introduit $b^*(x,y)$ sans dimension tel que $b = h_0 b^*$.

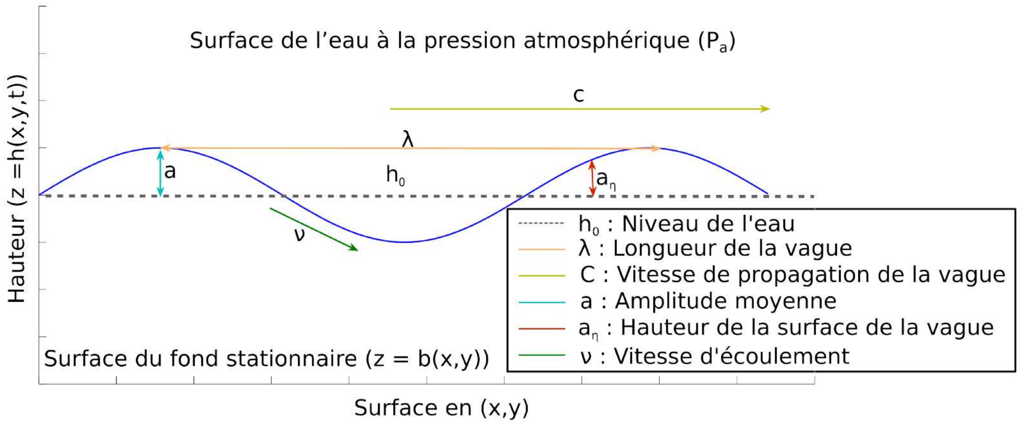

FIGURE 1 – Représentation d'une vague d'eau

On utilise maintenant la relation fondamentale d'hydrostatique donnée par $P = P_a + \rho g(h_0 - z)$ dont les détails pour obtenir cette relation sont expliqués au chapitre 1 de [Kra05]. Cette relation tient compte de la pression exercée au point (x,y,z) par le volume d'eau se situant entre la hauteur h_0 et z. On doit également considérer la pression dynamique supplémentaire de la vague d'eau que l'on notera $p(x,y,z)$. Introduisons $p^*(x,y,z)$ sans dimension tel que $p = \rho g h_0 p^*$. Donc, si on ajoute cette pression à celle donnée par la relation d'hydrostatique, on obtient que

$$P = P_a + \rho g(h_0 - z) + \rho g h_0 p^*. \tag{18}$$

Les variables sans dimension calculées précédemment peuvent être résumées dans le système suivant :

$$\begin{cases} w = \frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda} w^*,\, v = v^*\sqrt{gh_0},\, u = u^*\sqrt{gh_0} \\ t = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}} t^*,\, x = \lambda x^*,\, y = \lambda y^*,\, z = h_0 z^* \\ \eta = a\eta^*,\, b = h_0 b^*,\, p = \rho g h_0 p^* \end{cases} . \tag{19}$$

Maintenant, le but est de remplacer les variables du système (17) par les variables sans dimension calculées. Si $z = h = h_0 + a\eta^*$, alors on sait de (19) que $h_0 z^* = h_0 + a\eta^*$. Donc, on obtient que $z^* = 1 + \frac{a}{h_0}\eta^*$ sur la surface.

À partir de la relation (18) et de la troisième équation du système (17), on peut trouver la pression p^* sur la surface $z = h(x,y,t)$. En effet, on a $P_a = P = P_a + \rho g(h_0 - h_0 z^*) + \rho g h_0 p^*$. Donc, $-\rho g(h_0 - h_0 z^*) = \rho g h_0 p^*$ si et seulement si $-\rho g h_0(1 - z^*) = \rho g h_0 p^*$ si et seulement si $z^* - 1 = p^*$. Par conséquent, $p^* = \frac{a}{h_0}\eta^*$, car $z^* = 1 + \frac{a}{h_0}\eta^*$ tel que calculé dans le paragraphe précédent.

De l'équation (15), du système (19) et puisqu'on a noté $h = h_0 + a\eta^*$, on a que $\frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda} w^* = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}\frac{\partial(h_0 + a\eta^*)}{\partial t^*} + \frac{u^*\sqrt{gh_0}}{\lambda}\frac{\partial(h_0 + a\eta^*)}{\partial x^*} + \frac{v^*\sqrt{gh_0}}{\lambda}\frac{\partial(h_0 + a\eta^*)}{\partial y^*}$. Comme h_0 ne dépend ni de x^*, ni de y^* et en divisant des deux côtés par $\frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}$, on obtient que $h_0 w^* = a\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + au^*\frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + av^*\frac{\partial \eta^*}{\partial y^*}$. Par conséquent, on trouve que

$$w^* = \frac{a}{h_0}\left(\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial \eta^*}{\partial y^*}\right) \quad \text{en } z^* = 1 + \frac{a}{h_0}\eta^*. \tag{20}$$

Du système (19) dans l'équation (16), on obtient que

$$\frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda}w^* = u^*\sqrt{gh_0}\frac{\partial h_0 b^*}{\partial \lambda x^*} + v^*\sqrt{gh_0}\frac{\partial h_0 b^*}{\partial \lambda y^*}$$

si et seulement si

$$w^* = u^*\frac{\partial b^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial b^*}{\partial y^*} \quad \text{en } z^* = b^*(x^*,y^*). \tag{21}$$

En remplaçant les variables de l'équation de continuité d'Euler (6) par les variables sans dimension de (19), on trouve que $\frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}\frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda h_0}\frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0$. Par conséquent, on obtient l'équation de continuité sans dimension, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = div(\nu^*) = 0. \tag{22}$$

On remplace également les variables de la troisième équation de (14) par celles sans dimension données dans (19) et par l'équation (18). Il vient $\frac{h_0^2 g}{\lambda^2}\left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^*\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right) = -\frac{1}{h_0\rho}\frac{\partial(P_a + \rho g h_0(1-z^*+p^*))}{\partial z^*} - g$. Puisque P_a est une constante et que h_0 ne dépend pas de z^*, on a

$$\frac{\partial(P_a + \rho g h_0(1-z^*) + \rho g h_0 p^*)}{\partial z^*} = \rho g h_0\left(-1 + \frac{\partial p^*}{\partial z^*}\right).$$

Ainsi, on obtient $-\frac{1}{h_0\rho}\rho g h_0\left(-1 + \frac{\partial p^*}{\partial z^*}\right) - g = -g\frac{\partial p^*}{\partial z^*}$. Donc, on trouve que

$$\left(\frac{h_0}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^*\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right) = \left(\frac{h_0}{\lambda}\right)^2\frac{Dw^*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*}. \tag{23}$$

On procède de la même façon pour les vitesses u et v données par les première et deuxième équations de (14). En remplaçant par les variables sans dimension de (19) et par l'équation (18), on obtient que

$$\frac{gh_0}{\lambda}\left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right) = -\frac{1}{\rho\lambda}\frac{\partial(P_a + \rho g h_0(1-z^*+p^*))}{\partial x^*}.$$

Par conséquent, on obtient que

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{Du*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*}. \tag{24}$$

De même, on obtient pour la vitesse v

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^*\frac{\partial v^*}{\partial z^*} = \frac{Dv*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*}. \tag{25}$$

En remplaçant par les variables sans dimension de (19), on trouve, pour les équations d'écoulement non rotationnel données à la dernière ligne de (17), que

$$\left(\frac{h_0}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \left(\frac{h_0}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0. \qquad (26)$$

Notons que les coefficients $\frac{h_0}{\lambda}$ et $\frac{a}{h_0}$ se retrouvent dans les équations (20), (23), (26) et devant les expressions z^* et p^* dans (19). Posons $\varepsilon = \frac{a}{h_0}$ et $\delta = \frac{h_0}{\lambda}$. On interprète ε comme étant l'amplitude de la vague et δ comme étant l'inclinaison de la vague. Notons aussi que ces deux variables sont sans dimension. En ramassant les équations (19) à (26), on retrouve alors le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{Du*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} & \\ \frac{Dv*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} & \\ \delta^2 \frac{Dw*}{dt^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} & \\ div(\nu^*) = 0 & \\ p^* = \varepsilon\eta^* & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^* \\ w^* = \varepsilon\left(\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial \eta^*}{\partial y^*}\right) & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^* \\ w^* = u^*\frac{\partial b^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial b^*}{\partial y^*} & \text{en } z^* = b^* \\ w^* = 0 & \text{en } z^* = b^* \\ \delta^2\frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \delta^2\frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0 & \end{cases} . \qquad (27)$$

On remarque que si la surface d'eau est au repos parfait, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune vague, alors $\varepsilon = 0$. Après le passage d'une vague, l'eau tend à redevenir au repos et cela se caractérise par $\lim_{a\to 0} \frac{a}{h_0} = 0$. L'inclinaison de la vague tend à être nulle plus la longueur λ de la vague est grande, c'est-à-dire que $\delta \to 0$ lorsque $\lambda \to \infty$. Si $\varepsilon \to 0$, alors on constate que $p^* \to 0$ et $w \to 0$ lorsque $z \to 1$. Il est convenable de considérer le changement d'échelle suivant. Afin de conserver la même notation pour les variables déjà définies sans dimension, on utilise l'opérateur $\mapsto$ tel que l'expression $A^* \mapsto kA^*$ signifie A^* est remplacé par kA^*. Pour le vecteur de vitesse ν^* et la pression p^*, on remplace $\nu^* \mapsto \varepsilon\nu^*$ et $p^* \mapsto \varepsilon p^*$. Il en découle le système final des vagues d'eau suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \varepsilon\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} & \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \varepsilon\left(u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^*\frac{\partial v^*}{\partial z^*}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} & \\ \delta^2\left[\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \varepsilon\left(u^*\frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^*\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)\right] = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} & \\ div(\nu^*) = 0 & \\ p^* = \eta^* & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^* \\ w^* = \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \varepsilon\left(u^*\frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial \eta^*}{\partial y^*}\right) & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^* \\ w^* = u^*\frac{\partial b^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial b^*}{\partial y^*} & \text{en } z^* = b^* \\ w^* = 0 & \text{en } z^* = b^* \\ \delta^2\frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \delta^2\frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0 & \end{cases} \cdot \qquad (28)$$

En prenant $\varepsilon \to 0$, on trouve le problème linéaire des vagues d'eau suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} & \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} & \\ \delta^2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} & \\ div(\nu^*) = 0 & \\ p^* = \eta^* & \text{en } z^* = 1 \\ w^* = \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} & \text{en } z^* = 1 \\ w^* = u^* \frac{\partial b^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial b^*}{\partial y^*} & \text{en } z^* = b^* \\ w^* = 0 & \text{en } z^* = b^* \\ \delta^2 \frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \delta^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0 & \end{cases} . \tag{29}$$

Pour les p^*, η^* et w^* définies en $z^* = 1$, on peut approximer les solutions à l'aide d'une série de Taylor par rapport à ε. Aussi, comme $\varepsilon \to 0$, il est possible d'approximer p^*, η^* et w^* sous la forme de séries de puissances données par

$$p^* \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n p_n^*, \quad \eta^* \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n^*, \quad w^* \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n^*.$$

4 Équation de Korteweg-de Vries

Le but de cette section est de réduire les équations de (28) selon une approche asymptotique, c'est-à-dire en séries de puissances de Taylor afin de trouver l'équation de Korteweg-de Vries. Nous développerons les équations du système (28) en séries de Taylor par rapport au paramètre ϵ. Les équations du système deviennent des égalités des séries de Taylor en ϵ, donc on sait que les coefficients près de ϵ^n des deux côtés coïncident. Alors, en considérant les termes avec ϵ^n pour $n = 0,1,2,\ldots$, on produit les systèmes pour les coefficients de Taylor de η^*. En trouvant les coefficients η_n^* à partir de ces systèmes, on obtient les approximations successives à la solution η^*. Le système pour $n = 2$ donnera l'équation de Korteweg-de Vries.

Pour effectuer cette approche asymptotique, on s'intéresse aux longues vagues de faible amplitude, c'est-à-dire quand $\varepsilon \to 0$ et $\delta \to 0$. De plus, on considérera que les vagues se propagent dans la direction des x positif, c'est-à-dire que $v = 0$ et qu'on enlève toute dépendance par rapport à y. On ajoute également l'hypothèse que $b^* \equiv 0$.

On veut maintenant étudier le système seulement avec le paramètre ε. On se propose donc les changements d'échelle $x^* \mapsto \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} x^*$, $t^* \mapsto \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} t^*$ et $w^* \mapsto \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} w^*$. En remplaçant dans les équations de (28) et puisque aucune dépendance en y

n'existe, on obtient que

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \varepsilon\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} & \\ \varepsilon\left[\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \varepsilon\left(u^*\frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^*\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)\right] = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} & \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 & \\ p^* = \eta^* & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^*(x^*,t^*) \\ w^* = \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \varepsilon\left(u^*\frac{\partial \eta^*}{\partial x^*}\right) & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^*(x^*,t^*) \\ w^* = 0 & \text{en } z^* = 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \varepsilon\frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0 & \end{cases} \cdot \tag{30}$$

La dernière équation de (30) permet d'introduire le potentiel des vitesses d'écoulement. La notion du potentiel des vitesses a été expliquée à la deuxième section de cet article. Notons que les mêmes notations seront utilisées.

Posons $u^* = \frac{\partial \phi}{\partial x^*}$ et $\varepsilon w^* = \frac{\partial \phi}{\partial z^*}$. Une telle fonction ϕ existe grâce à la dernière équation de (30). En substituant dans la première équation de (30), on trouve que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^* \partial x^*} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x^*}\frac{\partial^2 \phi}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z^*}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^* \partial x^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0.$$

En intégrant par rapport à x^*, on obtient

$$\frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z^*}\right)^2 + p^* = f_0(z^*, t^*), \tag{31}$$

où $f_0(z^*, t^*)$ est une fonction d'intégration. On effectue le même calcul (en intégrant en z^* cette fois) pour la seconde équation de (30) et on obtient aussi l'équation (31), mais avec $f_1(x^*, t^*)$ comme fonction d'intégration. On trouve alors que $f_1(x^*, t^*) = f_0(z^*, t^*)$ et on déduit qu'il n'y a pas de dépendance en x^* et z^*. On peut donc écrire

$$R(t^*) = \frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z^*}\right)^2 + p^*, \tag{32}$$

où $R(t^*)$ est constante dans le domaine $\{(x^*,z^*) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z^* < 1 + \varepsilon\eta^*(x^*, t^*)\}$ pour tout t^*. Posons $\phi_f = \phi + f(t^*)$ où $f(t^*) = -\int_0^{t^*} R(t)\, dt$. On trouve alors que

$$\frac{\partial \phi_f}{\partial t^*} = \frac{\partial \phi}{\partial t^*} - R(t^*). \tag{33}$$

Notons que le potentiel des vitesses ϕ est défini à l'addition d'une fonction indépendante de (x,y,z) près. De (33), il vient que

$$\frac{\partial \phi_f}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^*}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z^*}\right)^2 + p^* = 0. \tag{34}$$

En substituant $\phi = \phi_f - f(t^*)$ dans (34) on obtient que

$$\frac{\partial \phi_f}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial \phi_f}{\partial x^*}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_f}{\partial z^*}\right)^2 + p^* = 0. \tag{35}$$

On écrira ϕ au lieu de ϕ_f. Puisque $p^* = \eta^*$ en $z = 1 + \varepsilon\eta^*$, puis en remplaçant les valeurs de u^* et εw^* dans les équations de (30), on tire le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial t^*} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^*}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z^*}\right)^2 + \eta^* = 0 & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^* \\ \frac{\partial\phi}{\partial z^*} = \varepsilon\left[\frac{\partial\eta^*}{\partial t^*} + \varepsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^*}\frac{\partial\eta^*}{\partial x^*}\right)\right] & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^* \\ \varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial(x^*)^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial(z^*)^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0, 1 + \varepsilon\eta^*) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases}. \tag{36}$$

Notons que les solutions de $\phi(x^*,t^*,z^*)$ et de $\eta^*(x^*,t^*)$ dans (36) sont des fonctions analytiques de paramètre ε, c'est-à-dire qu'elles peuvent être exprimées sous la forme de séries de puissances en ε suivantes :

$$\phi(x^*,z^*,t^*) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \phi_k(x^*,z^*,t^*), \quad \eta^*(x^*,t^*) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \eta_k^*(x^*,t^*).$$

Afin d'obtenir l'équation de Korteweg-de Vries, qui est l'objectif de la section, on procèdera en deux étapes. La première sera de dériver l'équation d'onde qui est détaillée dans [Whi11]. Pour cela, on effectuera l'approximation d'ordre 1 pour $\phi(x^*,t^*,z^*)$ et $\eta(x^*,t^*)$ en ϵ. Pour la seconde étape, on procédera à un changement de variable dans (36) et on trouvera les approximations d'ordre 2 en ε du nouveau système. Cela nous permettra de trouver l'équation de Korteweg-de Vries.

4.1 Équation de l'onde

L'approximation d'ordre 0 en ε, c'est-à-dire que $\phi \in \mathcal{O}(\varepsilon^0)$ et $\eta^* \in \mathcal{O}(\varepsilon^0)$, signifie qu'on ne conserve que les termes de degré 0 ou, de façon équivalente, les termes contenant ε à la puissance 0. Donc, on a les approximations d'ordre 0 suivantes :

$$\phi(x^*,z^*,t^*) \approx \phi_0(x^*,z^*,t^*) \text{ et } \eta(x^*,t^*) \approx \eta_0(x^*,t^*).$$

On obtient alors l'approximation suivante du système (36) :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi_0}{\partial t^*} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z^*}\right)^2 + \eta_0^* = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial\phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial^2\phi_0}{\partial(z^*)^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0,1) \\ \frac{\partial\phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases}. \tag{37}$$

Des trois dernières équations de (37), on déduit que ϕ_0 est indépendant de z^*. Donc, on peut poser $\psi(x^*,t^*) = \phi_0(x^*, z^*, t^*)$. Avec la deuxième équation de (37), la première équation de (37) s'écrit comme étant

$$\frac{\partial\psi}{\partial t^*} + \eta_0^* = 0 \quad \text{en } z^* = 1. \tag{38}$$

C'est la solution de l'équation (38) qui fournit l'approximation de η^* du profil des vagues.

Procédons maintenant à l'approximation d'ordre 1 en ε du système (36), c'est-à-dire que $\phi \in \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $\eta^* \in \mathcal{O}(\varepsilon)$. Donc, on a $\phi \approx \phi_0 + \varepsilon\phi_1$ et $\eta^* \approx \eta_0^* + \varepsilon\eta_1^*$. On déduit alors que

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z^*}\right)^2 = \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial z^*}\right)^2 + 2\varepsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial z^*}\frac{\partial \phi_1}{\partial z^*} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

En vertu du calcul précédent, en remplaçant les approximations de ϕ et η^* dans (36) et en ne conservant que les termes de degré 1 en ε, le système se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial t^*} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x^*}\right)^2 + \eta_1^* + \frac{\partial \phi_1}{\partial z^*}\frac{\partial \phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z^*} = \frac{\partial \eta_0}{\partial t^*} & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial (z^*)^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial (x^*)^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0{,}1) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases}. \tag{39}$$

Puisque $\psi(x^*{,}t^*) = \phi_0(x^*{,}z^*{,}t^*)$, la troisième équation de (39) s'écrit

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial (z^*)^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^*)^2} \quad \text{en } z^* \in (0{,}1). \tag{40}$$

De l'équation (40), puis en intégrant par rapport à z^*, il vient que

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z^*} = -z^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^*)^2} + C(x^*, t^*) \quad \text{en } z^* \in [0{,}1], \tag{41}$$

où $C(x^*, t^*)$ est une fonction arbitraire de x^* et t^*. La condition initiale donnée par la dernière équation de (39) implique que $C(x^*, t^*) = 0$. Par conséquent, l'équation (41) en $z^* = 1$ devient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^*)^2} = -\frac{\partial \eta_0}{\partial t^*} \quad \text{en } z^* = 1. \tag{42}$$

Des équations trouvées en $z^* = 1$, on peut maintenant déduire l'équation linéaire de l'onde (voir pages 5,6 et 134 dans [Whi11]) donnée par

$$\frac{\partial^2 \eta_0^*}{\partial (x^*)^2} - \frac{\partial^2 \eta_0^*}{\partial (t^*)^2} = 0 \quad \text{en } z^* = 1. \tag{43}$$

En effet, en dérivant par rapport à t^*, l'équation (38) devient

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial (t^*)^2} = -\frac{\partial \eta_0^*}{\partial t^*} \quad \text{en } z^* = 1.$$

On en déduit, avec l'équation (42), que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial (t^*)^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^*)^2} = -\frac{\partial \eta_0^*}{\partial t^*} \quad \text{en } z^* = 1.$$

En dérivant l'équation précédente par rapport à t^*, on trouve que

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial(t^*)^3} = \frac{\partial^3\psi}{\partial(t^*)\partial(x^*)^2} = -\frac{\partial^2\eta_0^*}{\partial(t^*)^2} \quad \text{en } z^* = 1. \tag{44}$$

De plus, en dérivant deux fois l'équation (38) par rapport à x^*, on obtient que

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial(t^*)\partial(x^*)^2} = -\frac{\partial^2\eta_0^*}{\partial(x^*)^2} \quad \text{en } z^* = 1. \tag{45}$$

Par conséquent, en combinant les équations (44) et (45), on retrouve l'équation d'onde (43). D'après [Whi11], la solution générale de cette équation est de la forme $\eta_0^*(x^*,t^*) = f(x^* - t^*) + \bar{f}(x^* + t^*)$, où f représente la propagation à la vitesse unitaire de la vague sur l'axe des x positifs et $\bar{f}$ la propagation à la vitesse unitaire de la vague sur l'axe des x négatifs. Au début de la section, on a considéré que les vagues se propagent selon l'axe des x positifs, alors posons $\eta_0^*(x^*,t^*) = f(x^* - t^*)$. Cela conclut la première étape de notre objectif puisqu'on a trouvé l'équation d'onde. L'équation de KdV est obtenue en considérant le problème par rapport aux différentes variables.

4.2 Équation de KdV

Considérons le changement de variables dans (36) donné par $(x^*, t^*) \mapsto (\xi, \tau)$, où $\xi = x^* - t^*$ et $\tau = \varepsilon t^*$. On trouve $x^* = \xi + \frac{\tau}{\varepsilon}$ avec $t^* = \frac{\tau}{\varepsilon}$. Il en découle, à l'aide de la dérivation en chaîne, que

$$\frac{\partial}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t^*} = -\frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Les équations de (36) deviennent donc

$$\begin{cases} -\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z^*}\right)^2 + \eta^* = 0 & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^* \\ \frac{\partial\phi}{\partial z^*} = \varepsilon\left[-\frac{\partial\eta^*}{\partial\xi} + \varepsilon\left(\frac{\partial\eta^*}{\partial\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\eta^*}{\partial\xi}\right)\right] & \text{en } z^* = 1 + \varepsilon\eta^* \\ \varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial(z^*)^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0, 1 + \varepsilon\eta^*) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases}. \tag{46}$$

De façon similaire au système (36), $\phi(\xi,z^*,\tau)$ et $\eta^*(\xi,\tau)$ peuvent être approximés par des séries de puissances en ε comme suit :

$$\phi(\xi,z^*,\tau) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_k(\xi,z^*,\tau), \quad \eta^*(\xi,\tau) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k H_k(\xi,\tau).$$

On peut maintenant procéder à l'approximation d'ordre 2 en ϵ des solutions ϕ et η du système (46). On débutera avec les équations d'ordre 0 en ϵ, puis on obtiendra les équations qui se trouvent à l'ordre 1 et 2 en ϵ du système (46) dans le but de déterminer les Φ_k et H_k pour $k = 0,1,2$.

L'approximation d'ordre 0 en ε du système (46) donne le système approximatif suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*}\right)^2 + H_0 = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial (z^*)^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0,1) \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases}. \tag{47}$$

Des trois dernières équations de (47), on déduit que Φ_0 est indépendant de z^*, alors on peut poser $\Phi_0(\xi, z^*, \tau) = \gamma(\xi, \tau)$ pour $z^* \in [0,1]$. Cela implique que $\frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} = 0$ en $z^* = 1$, donc la première équation de (47) devient

$$H_0(\xi, \tau) = \frac{\partial \gamma(\xi, \tau)}{\partial \xi} \quad \text{en } z^* = 1. \tag{48}$$

Comme on a déterminé H_0 et Φ_0 en termes de γ, nous procéderons à la considération des termes d'ordre 1 en ϵ dans le système (46) afin de trouver H_1 et Φ_1. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi}\right)^2 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + H_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*}\frac{\partial \Phi_0}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} = -\frac{\partial H_0}{\partial \xi} & \text{en } z^* = 1 \\ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial (z^*)^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0,1) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases}. \tag{49}$$

Puisque $\gamma(\xi,\tau) = \Phi_0(\xi,z^*,\tau)$, la troisième équation de (49) s'écrit $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial (z^*)^2} = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2}$ en $z^* \in (0,1)$. En l'intégrant par rapport à z^*, on obtient

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} = -z^* \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + C(\xi, \tau), \tag{50}$$

où $C(\xi, \tau)$ est une fonction arbitraire de ξ et τ. Or, la condition initiale exprimée par la dernième équation de (49) implique que $C(\xi, \tau) = 0$. Par conséquent, on obtient

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} = -z^* \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} \quad \text{pour } z^* \in [0,1]. \tag{51}$$

En intégrant (51) par rapport à z^*, on trouve

$$\Phi_1(\xi, z^*, \tau) = -\frac{(z^*)^2}{2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + \alpha(\xi,\tau) \quad \text{pour } z^* \in [0,1], \tag{52}$$

où $\alpha(\xi,\tau)$ est la fonction d'intégration indépendante de z^*. En dérivant l'équation (52) en ξ, on a

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = -\frac{(z^*)^2}{2}\frac{\partial^3 \gamma}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \alpha(\xi,\tau)}{\partial \xi} \quad \text{pour } z^* \in [0,1]. \tag{53}$$

Par conséquent, en remplaçant (53) dans la premième équation de (49) et en évaluant (52) en $z^* = 1$, on trouve

$$H_1(\xi,\tau) = -\frac{\partial\gamma}{\partial\tau} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^3\gamma}{\partial\xi^3} + \frac{\partial\alpha(\xi,\tau)}{\partial\xi}. \tag{54}$$

Notons que le but est d'obtenir une équation ne contenant que des termes en γ pour ensuite les réécrire en termes de H_0. Pour ce faire, on a besoin de l'approximation d'ordre 2 en ε des solutions du système (46), c'est-à-dire que $\phi \in \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ et $\eta^* \in \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Le but de cette approximation est de trouver Φ_2.

Notons que la deuxième équation de (46) est en $z^* = 1 + \varepsilon\eta^*$. Comme ϕ dépend de z^* et que z^* dépend de ε, on développe $\frac{\partial\phi}{\partial z^*}(\xi, 1+\varepsilon\eta^*, \tau)$ en série par rapport à z^* en $z^* = 1$ et on obtient

$$\frac{\partial\phi}{\partial z^*}(\xi, 1+\varepsilon\eta^*, \tau) = \frac{\partial\phi}{\partial z^*}\bigg|_{z^*=1} + \varepsilon\eta^*\frac{\partial^2\phi}{\partial(z^*)^2}\bigg|_{z^*=1} + \frac{\varepsilon^2(\eta^*)^2}{2}\frac{\partial^3\phi}{\partial(z^*)^3}\bigg|_{z^*=1} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{55}$$

Notons qu'il en est de même pour $\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\xi, 1+\varepsilon\eta^*, \tau)$ et $\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(\xi, 1+\varepsilon\eta^*, \tau)$. On sait que $\eta^* = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ et que

$$\frac{\partial\phi}{\partial z^*} = \varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial z^*} + \varepsilon^2\frac{\partial\Phi_2}{\partial z^*} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{56}$$

Rappelons que $\frac{\partial\Phi_0}{\partial z^*} = 0$ en $z^* = 1$. Alors, en substituant (56) dans (55), on trouve

$$\frac{\partial\phi}{\partial z^*} = \left(\varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial z^*} + \varepsilon^2 H_0\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial(z^*)^2}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial\Phi_2}{\partial z^*} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \text{en } z^* = 1. \tag{57}$$

Des expressions similaires à (57) peuvent être obtenues pour les dérivées par rapport à ξ et τ. En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = &\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi} + \varepsilon H_0\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\xi^2} + \varepsilon^2 H_1\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\xi^2} + \frac{\varepsilon^2 H_2}{2}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\xi^3}\right)\\ &+\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi} + \varepsilon^2 H_0\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\xi^2}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{58}$$

et on procède de façon analogue pour $\frac{\partial\phi}{\partial\tau}$. En substituant (57) et (58) dans les équations de (46) et en tenant compte que $\frac{\partial\Phi_0}{\partial z^*} = 0$ en $z^* = 1$, on déduit le système suivant pour les termes avec ϵ^2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z^*}\right)^2 + H_2 - \frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi} = 0 & \text{en } z^* = 1\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z^*} - H_0\frac{\partial^2\gamma}{\partial\xi^2} = -\frac{\partial H_1}{\partial\xi} + \frac{\partial H_0}{\partial\tau} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\frac{\partial H_0}{\partial\xi} & \text{en } z^* = 1\\ \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial(z^*)^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\xi^2} = 0 & \text{en } z^* \in (0,1)\\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z^*} = 0 & \text{en } z^* = 0 \end{cases}. \tag{59}$$

En vertu de (51) et de (53), on trouve que

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z^*} = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2}, \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 \gamma}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \alpha(\xi,\tau)}{\partial \xi} \quad \text{en } z^* = 1. \tag{60}$$

De la troisième équation de (59) et en vertu de l'équation (52), on a que

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial (z^*)^2} = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} = \frac{(z^*)^2}{2}\frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} \quad \text{pour } z^* \in (0,1). \tag{61}$$

On veut retrouver Φ_2, alors on intègre une première fois l'équation (61) par rapport à z^* puisque ni γ ni α ne dépendent de z^*. On obtient que

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z^*} = \frac{(z^*)^3}{6}\frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - z^*\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \beta_0(\xi,\tau) \quad \text{pour } z^* \in (0,1), \tag{62}$$

où $\beta_0(\xi,\tau)$ est une fonction arbitraire en (ξ,τ). Or, en vertu de la quatrième équation de (59), on a que $\beta_0(\xi,\tau) = 0$. En intégrant l'équation (62) en z^*, on trouve que

$$\Phi_2(\xi,\tau) = \frac{(z^*)^4}{24}\frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - \frac{(z^*)^2}{2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \beta(\xi,\tau) \quad \text{pour } z^* \in [0,1], \tag{63}$$

où $\beta(\xi,\tau)$ est une fonction arbitraire en (ξ,τ). Afin d'obtenir une équation dont les termes seront en γ, on remplace les termes dans la deuxième équation de (59) par (48), (54), (52) et (62). En effectuant les dérivées nécessaires, on obtient en $z^* = 1$:

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{\partial \gamma}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2}.$$

En simplifiant le tout, on tire

$$2\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau \partial \xi} + 3\frac{\partial \gamma}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} = 0 \quad \text{en } z^* = 1.$$

En vertu de l'équation (48), on obtient l'équation de Korteweg-de Vries à la hauteur des vagues $\eta^*(\xi,\tau) \approx H_0(\xi,\tau)$:

$$2\frac{\partial H_0}{\partial \tau} + 3H_0\frac{\partial H_0}{\partial \xi} + \frac{1}{3}\frac{\partial^3 H_0}{\partial \xi^3} = 0 \quad \text{en } z^* = 1. \tag{64}$$

Alors, H_0 est une solution de l'équation KdV (64). En connaissant H_0, on trouve le potentiel des vitesses ϕ comme suit. Rappelons que le développement de Taylor d'ordre 2 en ε utilisé pour ϕ est $\phi(\xi,z^*,\tau) = \Phi_0(\xi,z^*,\tau) + \varepsilon\Phi_1(\xi,z^*,\tau) + \varepsilon^2\Phi_2(\xi,z^*,\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$. Des équations (52), (63) et, puisque $\Phi_0(\xi,z^*,\tau) = \gamma(\xi,\tau)$, on obtient pour $z^* \in [0,1]$:

$$\phi = \gamma + \varepsilon\left[-\frac{(z^*)^2}{2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} + \alpha\right] + \varepsilon^2\left[\frac{(z^*)^4}{24}\frac{\partial^4 \gamma}{\partial \xi^4} - \frac{(z^*)^2}{2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \beta\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{65}$$

En vertu de (48), on peut réécrire (65) selon H_0 comme suit pour $z^* \in [0,1]$:

$$\phi = \frac{\partial H_0}{\partial \xi} + \varepsilon \left[-\frac{(z^*)^2}{2} \frac{\partial^3 H_0}{\partial \xi^3} + \alpha \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{(z^*)^4}{24} \frac{\partial^5 H_0}{\partial \xi^5} - \frac{(z^*)^2}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi^2} + \beta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{66}$$

Si l'on considère aussi les ordres supérieurs à 2 en ε, on trouve que la solution au potentiel des vitesses (65), pour $z^* \in [0,1]$, en supposant que les fonctions d'intégration sont nulles, s'écrit, selon [Bur11], sous la forme :

$$\phi(\xi, z^*, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \frac{(z^*)^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n+1} H_0(\xi, \tau)}{\partial \xi^{2n+1}}.$$

5 Solitons

Une vague solitaire est une vague qui a une amplitude finie et qui se propage à une vitesse constante sans se déformer dans un milieu non linéaire. D'après [Mey11] (page 1521), la première observation d'une telle vague a été faite en 1834 par John Scott Russell. En 1895, le professeur Diederik Korteweg et son étudiant au doctorat Gustav de Vries ont dérivé l'équation aux dérivées partielles modélisant la vague solitaire observée par Russell. Cette équation porte maintenant leur nom, c'est-à-dire l'équation de Korteweg-de Vries.

Les solitons sont des solutions particulières exactes de l'équation de KdV qui représentent des vagues solitaires. Avant de donner de telles solutions, il est utile de réécrire l'équation de KdV (64) selon le changement de variables suivant :

$$\tilde{\tau} = \alpha \tau, \quad \tilde{\xi} = \beta \xi, \quad \widetilde{H_0} = \gamma H_0,$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On veut que

$$\frac{\partial \widetilde{H_0}}{\partial \tilde{\tau}} + 6 \widetilde{H_0} \frac{\partial \widetilde{H_0}}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial^3 \widetilde{H_0}}{\partial \tilde{\xi}^3} = 0. \tag{67}$$

On trouve que $\frac{\partial H_0}{\partial \xi} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial \widetilde{H_0}}{\partial \tilde{\xi}}$ et $\frac{\partial H_0}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\partial \widetilde{H_0}}{\partial \tilde{\tau}}$. En substituant dans l'équation (64), on obtient que

$$\frac{2\alpha}{\gamma} \frac{\partial \widetilde{H_0}}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{3\beta}{\gamma^2} \widetilde{H_0} \frac{\partial \widetilde{H_0}}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\beta^3}{3\gamma} \frac{\partial^3 \widetilde{H_0}}{\partial \tilde{\xi}^3} = 0. \tag{68}$$

Afin d'obtenir l'équation (67), on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{2\alpha}{\gamma} = 1 \\ \frac{3\beta}{\gamma^2} = 6 \\ \frac{\beta^3}{3\gamma} = 1 \end{cases}. \tag{69}$$

On trouve alors la solution suivante au système (69) :

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt[5]{\frac{3}{8}}, \quad \beta = \sqrt[5]{\frac{9}{2}}, \quad \gamma = \sqrt[5]{\frac{3}{8}}. \tag{70}$$

Par conséquent, en remplaçant les valeurs trouvées en (70) dans (68), on obtient bien l'équation (67).

Deux solutions exactes de l'équation (67), avec graphiques, sont données par [Bra12]. Ces deux solutions sont :

$$\widetilde{H_0} = \frac{\beta}{2}\ \mathrm{sech}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2}(x^* - \beta t^*)\right)^2 \tag{71}$$

et

$$\widetilde{H_0} = -\frac{\beta}{2}\ \mathrm{cosech}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2}(x^* - \beta t^*)\right)^2, \tag{72}$$

où $\beta > 0$. La solution (71) représente la vague solitaire se déplaçant vers la droite tandis que la solution (72) représente la vague solitaire se déplaçant vers la gauche.

Références

[Bra12] Klaus Brauer : The korteweg-de vries equation : History, exact solutions, and graphical representation. *University of Osnabrück*, page 20, 2012.

[Bur11] Georgy I. Burde : Solitary wave solutions of the high-order kdv models for bi-directional water waves. *Elsevier*, 16(3):1314–1328, 2011.

[CJ08] A. Constantin et R.S. Johnson : On the non-dimensionalisation, scaling and resulting interpretation of the classical governing equations for water waves. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 15:58–73, 2008.

[IP03] Luc Robillard Ion Paraschivoiu, Michel Prud'homme : *Mécanique des fluides.* Presses inter Polytechnique, 2003.

[JD92] R.S. Johnson et P.G. Drazin : *Solitons : An introduction.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[Joh97] R.S. Johnson : *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[Joh03] R.S. Johnson : The classical problem of water waves : a reservoir of integrable and nearly-integrable equations. *journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 10:72–92, 2003.

[Kra05] Egon Krause : *Fluid Mechanics With Problems and Solutions, and an Aerodynamics Laboratory.* Springer, 2005.

[Mey11] Robert A. Meyers : *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*, volume 1. Springer, 2011.

[Sor06] Robert M. Sorensen : *Basic Coastal Engineering.* US Springer, third édition, 2006.

[Whi11] G.B. Whitham : *Linear and Nonlinear Waves.* John Wiley and Sons, 2011.

Gabriel Lapointe
Département de mathématiques, Université de Sherbrooke
Courriel: gabriel.lapointe7@gmail.com